数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 47-55

$SU(2)$ invariant Thirring 模型における形状因子について

京都大学数理解析研究所　竹山美宏 (Yoshihiro Takeyama)*
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

0 方針

この稿では $SU(2)$ invariant Thirring 模型における形状因子 (form factor) にまつわる数学的話題を紹介します. 物理学的な話題に関しては, form factor についての基本文献である [S1] や、最近の論文 [BK] 等を参照して下さい.

1 動機付け

可積分な量子場の理論における重要な問題として次の二つがある.

1.局所作用素の空間を決定すること.　　2.相関関数を全て求めること.

massless(質量ゼロ) な可積分場の理論である共形場理論においては, これらの問題に対する答えが既に得られていると言えよう. すなわち, 局所作用素のなす空間はヴィラソロ代数の表現空間であり, 相関関数は超幾何型の積分により表示されるのであった.

ここで考える $SU(2)$ invariant Thirring 模型は massive(有質量) な可積分場の模型である. massive な理論における局所作用素は, 形状因子により記述される. ここで局所作用素 $\mathcal{O}$ の定める形状因子とは, 次のような行列要素である.

$$f^{\mathcal{O}}_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=\langle \mathrm{vac}|\mathcal{O}|A_{\epsilon_1}(\beta_1)\cdots A_{\epsilon_n}(\beta_n)\rangle. \tag{1.1}$$

但し $|A_{\epsilon_1}(\beta_1)\cdots A_{\epsilon_n}(\beta_n)\rangle$ は asymptotic state. すなわち, 局所作用素 $\mathcal{O}$ は (各 ϵ_j や n をいろいろ動かすことで定まる) 関数の family $\{f^{\mathcal{O}}_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n}\}$ として記述されているのである.

このとき, 物理学的議論により, 形状因子が満たすべき方程式系が導かれる. 上記の問題 1 は, この方程式系の解を「全て」与えることに帰着する. そして全ての形状因子が与えられれば, 相関関数を計算することが原理的に可能である (が易しくはない. 計算例が [BB, KS] にある). 従って, 形状因子が満たすべき方程式系の解を与えることが第一の問題となる. 以下では, この問題を $SU(2)$ invariant Thirring 模型の場合に考える.

---

*日本学術振興会特別研究員

2 解くべき方程式

$SU(2)$ invariant Thirring 模型の場合, 形状因子の足は $\epsilon_j = \pm$ である. そこで形状因子 $\{f_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n}\}$ に対し,

$$f(\beta_1,\cdots,\beta_n) := \sum_{\epsilon_1,\cdots\epsilon_n=\pm} f_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n}(\beta_1,\cdots,\beta_n) v_{\epsilon_1}\otimes\cdots\otimes v_{\epsilon_n} \tag{2.2}$$

とおく. $f(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ は, 2次元空間 $V := \mathbf{C}v_+ \oplus \mathbf{C}v_-$ のテンソル積 $V^{\otimes n}$ に値をとる関数である.

形状因子が満たすべき方程式系を f に対する方程式系として与えよう. まず $V\otimes V$ 上の線形作用素 $S(\beta)$ (S行列) を次で定義する.

$$S(\beta) := S_0(\beta)\widehat{S}(\beta), \quad S_0(\beta) := \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2\pi i})\Gamma(-\frac{\beta}{2\pi i})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2\pi i})\Gamma(\frac{\beta}{2\pi i})}, \quad \widehat{S}(\beta) := \frac{\beta-\pi i P}{\beta-\pi i}. \tag{2.3}$$

ただし, P は成分の入れ替え $P(u\otimes v) := v\otimes u$. さらに $V^{\otimes n}$ 上の線形作用素 $S_{ij}(\beta), P_{ij}$ を, $V^{\otimes n}$ の i-番目の成分と j-番目の成分のテンソル積に, それぞれ $S(\beta), P$ で作用するものとして定義する.

この時 f が満たすべき方程式は以下の3つである.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}).\quad P_{i,i+1}S_{i,i+1}(\beta_i-\beta_{i+1})f(\beta_1,\cdots,\beta_n) = f(\cdots,\beta_{i+1},\beta_i,\cdots),\\
&(\mathrm{II}).\quad P_{n-1,n}\cdots P_{1,2}f(\beta_1-2\pi i,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (-1)^{\frac{n}{2}}f(\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_1),\\
&(\mathrm{III}).\quad 2\pi i\,\mathrm{res}_{\beta_n=\beta_{n-1}+\pi i}f(\beta_1,\cdots,\beta_n)\\
&\qquad = (I-(-1)^{\frac{n}{2}-1}S_{n-1,n-2}(\beta_{n-1}-\beta_{n-2})\cdots S_{n-1,1}(\beta_{n-1}-\beta_1))\\
&\qquad\quad \times f(\beta_1,\cdots,\beta_{n-2})\otimes(v_+\otimes v_- - v_-\otimes v_+).
\end{aligned}$$

ここで I は恒等写像である.

3 解の構成（1）

以下 n は偶数であると仮定する. 方程式 (I),(II) から, $f(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ が次の差分方程式系を満たすことが容易にわかる.

$$\begin{aligned}
f(\beta_1,\cdots,\beta_j-2\pi i,\cdots,\beta_n) &= (-1)^{\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{j-1}S_0(\beta_j-\beta_k-2\pi i)\prod_{k=j+1}^{n}S_0(\beta_j-\beta_k)\\
&\quad\times \widehat{K}_j(\beta_1,\cdots,\beta_n)f(\beta_1,\cdots,\beta_n), \quad (j=1,\cdots,n),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで $\widehat{K}_j(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ は次で定義される $V^{\otimes n}$ 上の線形作用素.

$$\begin{aligned}
\widehat{K}_j(\beta_1,\cdots,\beta_n) &:= \widehat{S}_{j,j-1}(\beta_j-\beta_{j-1}-2\pi i)\cdots\widehat{S}_{j,1}(\beta_j-\beta_1-2\pi i)\\
&\quad\times \widehat{S}_{j,n}(\beta_j-\beta_n)\cdots\widehat{S}_{j,j+1}(\beta_j-\beta_{j+1}).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

方程式 (3.4) の右辺にある余計な factor を取り除くために次の関数 $\zeta(\beta)$ を導入する.

$$\zeta(\beta) := \frac{\Gamma_2(-i\beta+3\pi)\Gamma_2(i\beta+\pi)}{\Gamma_2(-i\beta+2\pi)\Gamma_2(i\beta)}, \quad \Gamma_2(x) = \Gamma_2(x|2\pi, 2\pi). \tag{3.6}$$

ここで $\Gamma_2(x|\omega_1, \omega_2)$ は二重ガンマ関数と呼ばれる特殊関数で, 次の性質を満たす.

$$\frac{\Gamma_2(x+\omega_1|\omega_1, \omega_2)}{\Gamma_2(x|\omega_1, \omega_2)} = \frac{1}{\Gamma_1(x|\omega_2)}. \tag{3.7}$$

ここで,

$$\Gamma_1(x|\omega) := \frac{\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\frac{x}{\omega}). \tag{3.8}$$

(多重ガンマ関数の性質については [JM] の Appendix を参照のこと)

そこで $\psi(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ を,

$$f(\beta_1, \cdots, \beta_n) = e^{\frac{n}{4}\sum_{j=1}^{n}\beta_j} \prod_{1\le j<j'\le n} \zeta(\beta_j - \beta_{j'})\,\psi(\beta_1, \cdots, \beta_n) \tag{3.9}$$

で定義すると, 方程式系 (3.4) は ψ に対する次の方程式系に書き換えられる.

$$\psi(\beta_1, \cdots, \beta_j - 2\pi i, \cdots, \beta_n) = \widehat{K}_j(\beta_1, \cdots, \beta_n)\psi(\beta_1, \cdots, \beta_n), \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{3.10}$$

この方程式系は, リー代数 sl_2 に対応するレベル 0 の qKZ 方程式と呼ばれるものであり, その解の積分表示が既に知られている [NPT]. そして, 逆にこの解 ψ から (3.9) によって定義される f は, もとの方程式 (I), (II) を満たすのである.

qKZ 方程式 (3.10) の解の積分表示は次のように与えられる. まず必要な記号を導入しておく. $M = \{m_1, \cdots, m_\ell\} \subset \{1, \cdots, n\}, m_1 < \cdots < m_\ell$ に対し,

$$v_M := v_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes v_{\epsilon_n} \in V^{\otimes n}, \quad (M = \{j|\epsilon_j = -\}), \tag{3.11}$$

$$g_M := \prod_{a=1}^{\ell} \left(\frac{1}{\alpha_a - \beta_{m_a}} \prod_{j=1}^{m_a - 1} \frac{\alpha_a - \beta_j + \pi i}{\alpha_a - \beta_j} \right) \prod_{1\le a<b\le\ell} (\alpha_a - \alpha_b - \pi i), \tag{3.12}$$

$$w_M := \mathrm{Skew} g_M. \tag{3.13}$$

とおく. ここで Skew は $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell$ に関する反対称化である:

$$\mathrm{Skew}F := \sum_{\sigma\in S_\ell} (\mathrm{sgn}\,\sigma) \cdot F(\alpha_{\sigma(1)}, \cdots, \alpha_{\sigma(\ell)}). \tag{3.14}$$

次に解をパラメトライズする deformed cycle と呼ばれる関数の空間を導入する. $\beta_1, \cdots, \beta_n$ について正則で, 各 β_j について $2\pi i$-periodic な関数全体のなす空間を $\mathcal{C}_n$ とするとき, 次のような多項式 P 全体のなす空間を $\widehat{\mathcal{P}}_n^{\otimes\ell}$ と書く.

$$P(A_1, \cdots, A_\ell) \in \mathcal{C}[A_1, \cdots, A_\ell], \quad \deg_{A_a} P \le n, \quad (a = 1, \cdots, \ell). \tag{3.15}$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_q^{\otimes \ell} := \left\{ \frac{P(A_1,\cdots,A_\ell)}{\prod_{a=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n}(1-A_aB_j^{-1})} | P \in \widehat{\mathcal{P}}_n^{\otimes \ell} \right\} \tag{3.16}$$

とし, $\widehat{\mathcal{F}}_q^{\otimes \ell}$ の元を deformed cycle と呼ぶ. 但し以下では簡単のため, n, ℓ の値が明らかなときには, $P(A_1,\cdots,A_\ell)$ を deformed cycle と呼ぶことにする.

以上の記号のもとで, $V^{\otimes n}$-値関数 ψ_P を次で定義する.

$$\psi_P(\beta_1,\cdots,\beta_n) := \sum_{\substack{M \\ \#M=\ell}} v_M \int_{C^\ell} \prod_{a=1}^{\ell} d\alpha_a \prod_{a=1}^{\ell} \phi(\alpha_a) w_M \frac{P(A_1,\cdots,A_\ell)}{\prod_{a=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{n}(1-A_aB_j^{-1})}, \tag{3.17}$$

ここで, $A_a := e^{-\alpha_a}, B_j := e^{-\beta_j}$ で,

$$\phi(\alpha) := \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\frac{\alpha-\beta_j+\pi i}{-2\pi i})}{\Gamma(\frac{\alpha-\beta_j}{-2\pi i})}.$$

積分路 C は, 被積分関数の極を適当に分離するように実軸を変形させたもの.

Theorem 3.1 *[NPT] $n \geq 2\ell$ のとき, 任意の deformed cycle P に対し積分 (3.17) は収束し, ψ_P は (3.10) を満たす. さらに P が $\beta_1,\cdots,\beta_n$ について対称であるとき, ψ_P は次の二式を満たす.*

$$\psi_P(\cdots,\beta_{j+1},\beta_j,\cdots) = P_{j,j+1}\widehat{S}_{j,j+1}(\beta_j-\beta_{j+1})\psi_P(\cdots,\beta_j,\beta_{j+1},\cdots), \tag{3.18}$$

$$P_{n-1,n}\cdots P_{1,2}\psi_P(\beta_1-2\pi i,\beta_2,\cdots,\beta_n) = \psi_P(\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_1). \tag{3.19}$$

この定理により, $\beta_1,\cdots,\beta_n$ について対称な deformed cycle P に対応する qKZ 方程式の解 ψ_P から, (3.9) により f_P を定義すると, f_P は形状因子が満たすべき方程式 (I), (II) を満たすことがわかる.

4 閑話休題(1)

前節で, qKZ 方程式の解をパラメトライズする多項式を deformed cycle と呼んだが, これは積分 (3.17) がアーベル積分の変形とみなすことができるという事情による [S3, 竹]. これを見るために, qKZ 方程式の解の積分表示において,

$$\alpha_a = \lambda t_a, \quad \beta_j = \lambda z_j, \quad z_1 < \cdots < z_n$$

とおき, t_a, z_j を固定して $\lambda \to +\infty$ とするスケール極限をとる.

被積分関数の極限を計算すると,

$$\lambda^n \phi(\alpha) \to \phi(t)^{\mathrm{cl}} := (-2\pi i)^n \prod_{j=1}^{n} (t-z_j)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.20}$$

$$\lambda^{\ell-\binom{\ell}{2}} g_M \to g_M^{\mathrm{cl}} := \prod_{a=1}^{\ell} \left(\frac{1}{t_a - z_{m_a}} \right) \prod_{1\leq a<b\leq \ell} (t_a - t_b). \tag{4.21}$$

となる．特に (4.20) により，積分 (3.17) が超楕円曲線 $y^2 = \prod_{j=1}^{n}(t-z_j)$ 上の積分に移行することが予想できる．実際, deformed cycle は, この超楕円曲線上のサイクルと次のように対応している．各積分変数ごとに考えるとして，1 変数の deformed cycle $\gamma_k(A)$ を

$$\gamma_k(A) := (-1)^{k-1}\sigma_{n-k}(B_1^{-1},\cdots,B_n^{-1})A^{n-k}$$

(σ_k は k 次基本対称式) とおくと, 上記のスケール極限において,

$$\frac{\gamma_k(A)}{\prod_{j=1}^{n}(1-AB_j^{-1})} \quad\longrightarrow\quad \chi_{[z_k,z_{k+1}]}(t) \tag{4.22}$$

となる．ここで $\chi_{[z_k,z_{k+1}]}$ は区間 $[z_k, z_{k+1}]$ の定義関数で, $z_0 := -\infty, z_{n+1} := +\infty$ とした．従って deformed cycle γ_k に対する積分は, 区間 $[z_k, z_{k+1}]$ 上の積分と見なすことができる．さらにこれを, この区間を正の向きに囲むサイクル γ_k 上の積分と見なすことで, 積分 (3.17) はスケール極限で超楕円曲線上の積分に移行する．

この対応により,

$$\psi_P \to \psi^{\mathrm{cl}}_{c_1,\cdots,c_\ell} := \sum_{\#M=\ell} v_M \int_{c_1\times\cdots\times c_\ell} \prod_{a=1}^{\ell}\phi^{\mathrm{cl}}(t_a)w^{\mathrm{cl}}_M dt_1\wedge\cdots\wedge dt_\ell, \tag{4.23}$$

となる．但し, $w^{\mathrm{cl}}_M := \mathrm{Skew}g^{\mathrm{cl}}_M$ で, $c_1,\cdots,c_\ell$ は deformed cycle P に対応する超楕円曲線上のサイクルである．この ψ^{cl} は KZ 方程式

$$2\frac{\partial\psi}{\partial z_j} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} r_{jk}(z_j-z_k)\psi, \quad r(z) := \frac{-1+P}{z} \tag{4.24}$$

の解の積分表示 [DJMM, SV] に他ならない．

以上のように, qKZ 方程式の解のスケール極限をとることで, KZ 方程式の解のアーベル積分による積分表示が得られたわけであるが, ただこれだけだと, qKZ 方程式が KZ 方程式の q-変形であることを思えば, ただの予定調和と言えるかも知れない．しかし上で述べたアーベル積分との対応は, 実はもう少し深い内容を持っている．次にその一例を挙げる．

qKZ 方程式の解 ψ_P について, 次のことが成り立つ．

Proposition 4.1 *[T] deformed cycle P が,*

$$P(A_1,\cdots,A_\ell) = Q(A_1)M(A_2,\cdots,A_\ell), \tag{4.25}$$

$$Q(A) := \prod_{j=1}^{n}(1+AB_j^{-1}) - \prod_{j=1}^{n}(1-AB_j^{-1}), \tag{4.26}$$

の形のとき $\psi_P = 0$*, つまり (3.17) の右辺で和をとる各項の積分が一斉にゼロとなる．*

いま $Q(A)$ を $\gamma_k(A)$ で展開すると,

$$Q(A) = 2(\gamma_1(A)+\gamma_3(A)+\cdots+\gamma_{n-1}(A)) \tag{4.27}$$

となる. 従って, スケール極限で $Q(A)$ に対応するサイクルは

$$2(\gamma_1+\gamma_3+\cdots+\gamma_{n-1}) \tag{4.28}$$

である. これはホモロジーの意味で0となるサイクル, つまり超楕円曲線上の (適当な解析性の条件を満たす) 微分形式をその上で積分すると一斉に0となるサイクルなのである！

5 解の構成 (2)

方程式 (I), (II), (III) の解の構成に戻る. 前々節で, (I), (II) を満たす関数 f を構成した. これは deformed cycle によってパラメトライズされるのであった:

$$f(\beta_1,\cdots,\beta_n)=f_{P_n}(\beta_1,\cdots,\beta_n),\quad P_n:\text{deformed cycle}. \tag{5.29}$$

これを安直に (III) に代入すると,

$$\begin{aligned}2\pi i\operatorname{res}_{\beta_n=\beta_{n-1}+\pi i}f_{P_n}(\beta_1,\cdots,\beta_n)&=(I-(-1)^{\frac{n}{2}-1}S_{n-1,n-2}(\beta_{n-1}-\beta_{n-2})\cdots S_{n-1,1}(\beta_{n-1}-\beta_1))\\&\quad\times f_{P_{n-2}}(\beta_1,\cdots,\beta_{n-2})\otimes(v_+\otimes v_- - v_-\otimes v_+)\end{aligned} \tag{5.30}$$

となる. 従って, 方程式 (III) の解を構成するには, 関係式 (5.30) が全ての n (偶数) について成り立つような deformed cycle の列 $\{P_n\}$ を構成すれば良い.

(5.30) が成り立つための, deformed cycle に対する十分条件は次の通り.

Theorem 5.1 *[NT]* $\{P_n\}$ が以下の条件を満たすとき, $\{f_{P_n}\}$ は方程式 (III) を満たす:
$P_n=P_n(A_1,\cdots,A_\ell|B_1,\cdots,B_n)$ は $A_a, B_j^{\pm1}$ の多項式で, ある多項式

$$\overline{P}_n=\overline{P}_n(A_1,\cdots,A_\ell|B_1,\cdots,B_{n-2}|B) \tag{5.31}$$

が存在して,

$$\operatorname{Skew}\{P_n(A_1,\cdots,A_\ell|B_1,\cdots,B_{n-2},B,-B)\}=\operatorname{Skew}\left\{\prod_{a=1}^{\ell-1}(1-A_a^2B^{-2})\overline{P}_n\right\}, \tag{5.32}$$

$$\overline{P}_n(A_1,\cdots,A_{\ell-1},\pm B|B_1,\cdots,B_{n-2}|B)=\pm B^{n-1}d_nP_{n-2}(A_1,\cdots,A_{\ell-1}|B_1,\cdots,B_{n-2}) \tag{5.33}$$

を満たす. ここで Skew は $A_1,\cdots,A_\ell$ についての反対称化, d_n はある定数である.

以上の議論により, 方程式 (I), (II), (III) を解くことは, deformed cycle に対する漸化式 (5.32), (5.33) を解くことに帰着したわけである. この漸化式の解は, Smirnov によるサインゴルドン模型の weight 0 の form factor の構成 [S2] と同様の方法で, 以下のように与えることができる.

まず初期条件として,

$$P_m^{(\pm)}(A_1,\cdots,A_r|B_1,\cdots,B_m)=E_m(t|B)(\prod_{j=1}^m B_j)^s\prod_{1\le j<j'\le m}(B_j^{\pm1}+B_{j'}^{\pm1})\prod_{a=1}^r A_a^{k_a}, \tag{5.34}$$

$$E_m(t|B):=\exp(\sum_{k=-\infty}^{\infty}t_k\sum_{j=1}^m B_j^k), \tag{5.35}$$

を与える. ここで, t_k は形式的変数で, $0 \leq k_a \leq m$ $(a=1,\cdots,r)$, $0 \leq s \leq m/2$ とする. この P_m は $B_m = -B_{m-1}$ をゼロとして持つので, $P_k = 0 = \overline{P}_k, (k=0,2,4,\cdots,m-2)$ とおけば, (5.32), (5.33) が $n=2,4,\cdots,m$ に対して成立する.

Proposition 5.2 *[NT] (5.34) で与えられる $P_m^{(\pm)}$ に対し, $P_n^{(\pm)}, (n=m,m+2,m+4,\cdots)$ を以下のようにおくと, (5.32), (5.33) を満たす:*

$$P_n^{(\pm)}(A_1,\cdots,A_\ell|B_1,\cdots,B_n) = c_n^{m,r,s} E_n(t|B)(\prod_{j=1}^{n} B_j)^s \prod_{a=1}^{r} A_a^{k_a} \prod_{a=r+1}^{\ell} A_a^{n+1-2s+2r-2a} \times D_n^{\pm}(A_1,\cdots,A_r|B_1,\cdots,B_n). \tag{5.36}$$

ここで $c_n^{m,r,s}$ はある定数で,

$$D_n^{\pm}(A_1,\cdots,A_r|B_1,\cdots,B_n) := \frac{1}{\prod_{1\leq j<j'\leq n}(B_j^{\pm 1} - B_{j'}^{\pm 1})} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ B_1^{\pm 2} & \cdots & B_n^{\pm 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1^{\pm(n+m-2)} & \cdots & B_n^{\pm(n+m-2)} \\ H_1^{\pm}(B_1) & \cdots & H_1^{\pm}(B_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{\ell-r}^{\pm}(B_1) & \cdots & H_{\ell-r}^{\pm}(B_n) \end{vmatrix}, \tag{5.37}$$

$$H_k^{\pm}(B) := \exp(-2\sum_{p=-\infty}^{\infty} t_{2p}B^{2p})B^{\pm(2k-1)} \prod_{a=1}^{r}(1-A_a^2 B^{-2}). \tag{5.38}$$

ここで $n-2\ell = m-2r$.

さらにこの deformed cycle の列 $\{P_n^{(\pm)}\}$ から, (5.32), (5.33) を満たす deformed cycle の列の family を構成することができるのだが, それについては [NT] を見て頂きたい.

6 閑話休題 (2)

$r=0, m=2, t_k=0\,(k\leq 0)$ のときの (5.36) の右辺の一部を取り出してみる:

$$E_n(t|B)D_n^{+}(B_1,\cdots,B_n) = \frac{\exp(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \sum_{j=1}^{n} B_j^k)}{\prod_{1\leq j<j'\leq n}(B_j - B_{j'})} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ B_1^2 & \cdots & B_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1^n & \cdots & B_n^n \\ \exp(-2\sum_{p=1}^{\infty} t_{2p}B_1^{2p})B_1 & \cdots & \exp(-2\sum_{p=1}^{\infty} t_{2p}B_n^{2p})B_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp(-2\sum_{p=1}^{\infty} t_{2p}B_1^{2p})B_1^{n-3} & \cdots & \exp(-2\sum_{p=1}^{\infty} t_{2p}B_n^{2p})B_n^{n-3} \end{vmatrix} \tag{6.39}$$

これは $B_1,\cdots,B_n$ に関して対称であるから, Schur 関数 $S_\lambda(B_1,\cdots,B_n)$ により展開できる. この展開を実行すると, 次の公式を得る.

$$(6.39) = \sum_{\substack{\lambda:\mathrm{partition} \\ \ell(\lambda)\le n}} S_\lambda(B_1,\cdots,B_n)\Gamma_\lambda(t_1,t_2,\cdots). \tag{6.40}$$

ここで,

$$\Gamma_\lambda(t_1,t_2,\cdots) := \begin{vmatrix} q_{\lambda_1-1} & q_{\lambda_1+1} & p_{\lambda_1+2} & q_{\lambda_1+3} & p_{\lambda_1+4} & \cdots \\ q_{\lambda_2-2} & q_{\lambda_2} & p_{\lambda_2+1} & q_{\lambda_2+2} & p_{\lambda_2+3} & \cdots \\ q_{\lambda_3-3} & q_{\lambda_3-1} & p_{\lambda_3} & q_{\lambda_3+1} & p_{\lambda_3+2} & \cdots \\ q_{\lambda_4-4} & q_{\lambda_4-2} & p_{\lambda_4-1} & q_{\lambda_4} & p_{\lambda_4+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}, \tag{6.41}$$

ただし q_k,p_k は次の母関数で定義される.

$$\exp\big(\sum_{k=1}^\infty t_k z^k\big) =: \sum_{k=0}^\infty q_k z^k, \quad \exp\big(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} t_k z^k\big) =: \sum_{k=0}^\infty p_k z^k. \tag{6.42}$$

ここで現れた Γ_λ は, universal character と呼ばれるものの一つであり [K], 表現論的文脈だけでなく, 最近では Painlevé 方程式の特殊解の表示式 [MOK] にも現れた興味深い対象である. 公式 (6.40) は, universal character と Schur 関数の積に対する "Cauchy formula" と見ることもできよう.

7 まとめと補足

形状因子の構成にまつわる数学的話題について補足しておく.

方程式 (I), (II) に対する解は, qKZ 方程式 (3.10) の解から構成できるのであった. この解の積分表示はアーベル積分の変形とみなすことができる. 本論ではその根拠の一つとして, 超楕円曲線上の 0-homologus なサイクルの対応物である deformed cycle $Q(A)$ を紹介したが, この他にも deformed cycle の「交点数」なるものが定義でき, これを用いて Riemann の周期関係式の変形版を導くことができる [S3, 竹]. このようなアーベル積分に関する数学的事実の変形版を, qKZ 方程式の立場から研究するというのは面白い問題であろう.

上で与えた (I), (II) の解は, deformed cycle と呼ばれる ($B_1,\cdots,B_n$ についての) 対称多項式でパラメトライズされ, 方程式 (III) は deformed cycle の列が満たすべき漸化式 (5.32), (5.33) に帰着した. これは対称多項式に関する新しいタイプの問題であり, 同様の漸化式は他の massive な模型の形状因子を考えたときにも現れる [K1, P]. 本論では Smirnov による構成と同様な方法で deformed cycle の公式を与えたが, これを Schur 関数で展開すると universal character Γ_λ が現れる. 物理学的観点からすれば, 我々が構成した解のなす空間の指標を求めることが重要なのであるが, この問題は Γ_λ のうちで独立なものがどれだけあるかを求めることに他ならない. 少なくとも現時点では, この種の問題に対して有効な数学的枠組を筆者は知らない. なお他のモデルの場合において, 形状因子がなす空間の指標を計算した例としては [K2] がある.

参考文献

[BB] Babelon, O. and Bernard, D., From form factors to correlation functions. The Ising model, *Phys. Lett. B* **288** (1992), 113-120.

[BK] Babujian, H. and Karowski, M., The "bootstrap program" for integrable quantum field theories in 1+1 dim, hep-th/0110261.

[DJMM] Date, E., Jimbo, M., Matsuo, A. and Miwa, T., Hypergeometric type integrals and the $sl(2, \mathbf{C})$ Knizhnik-Zamolodchikov equations, *Int. J. Mod. Phys. B* **4** (1990), 1049-1057.

[JM] Jimbo, M. and Miwa, T., Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** (1996), 2923-2958.

[K] Koike, K., On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: by means of the universal characters, *Adv. Math.* **74** (1989), 57-86.

[KS] Korepin, V. and Slavnov, N., The determinant representation for quantum correlation functions of the sinh-Gordon model, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 9283-9295.

[K1] Koubek, A., Form-factor bootstrap and the operator content of perturbed minimal models, *Nucl. Phys. B* **428** (1994), 655-680.

[K2] Koubek, A., The space of local operators in perturbed conformal field theories, *Nucl. Phys. B* **435** (1995), 703-734.

[MOK] Masuda, T., Ohta, Y. and Kajiwara, K., A determinant formula for a class of rational solutions of Painlevé V equation, nlin.SI/0101056.

[NPT] Nakayashiki, A., Pakuliak, S. and Tarasov, V., On solutions of the KZ and qKZ equations at level zero, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **71** (1999), 459–496.

[NT] Nakayashiki, A. and Takeyama, Y., On form factors of $SU(2)$ invariant Thirring model, math-ph/0105040.

[P] Pillin, M., Polynomial recursion equations in form factors of ADE-Toda field theories, *Lett. Math. Phys.* **43** (1998), 211-224.

[S1] Smirnov, F.A., Form factors in completely integrable field theories, World Scientific, Singapore, 1992.

[S2] Smirnov, F., Counting the local fields in SG theory, *Nucl. Phys. B* **453** (1995), 807–824.

[S3] Smirnov, F., On the deformation of abelian integrals, *Lett. Math. Phys.* **36** (1996), 267-275.

[SV] Schechtman, V. and Varchenko, A., Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology, *Invent. Math.* **106** (1991), 139-194.

[竹] 竹山美宏, レベル 0 の qKZ 方程式とアーベル積分の量子化, 京都大学数理解析研究所修士論文.

[T] Tarasov, V., Completeness of the hypergeometric solutions of the qKZ equations at level zero, *Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2* **201** (2001), 309-321.